Varianta 73

Subiectul I.

a) $\left| i^{200} + i^{201} + i^{202} + i^{203} \right| = 0$.

b) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$.

c) $\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ şi $\begin{cases} x = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{3\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

d) $a = -4$.

e) $S_{ABC} = \frac{1}{2}$.

f) $a = 0$, $b = 32$.

Subiectul II.

1.

a) În mulțimea $M_2(\mathbf{Z}_3)$ există 81 matrice.

b) Probabilitatea căutată este $p = \frac{4}{5}$.

c) $g(0) = -\frac{1}{3}$.

d) $x = 0$.

e) Există 16 submulțimi cu un număr impar de elemente ale mulțimii inițiale.

2.

a) $f'(x) = \cos x$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

b) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx = 2$.

c) Există un singur punct de inflexiune

d) Există două puncte de extrem local.

e) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot f(x)\,dx = 1$.

Subiectul III.

a) $f(1) = n$.

b) Evident.

c) $f(x)=0 \iff x\neq 1$ şi $x^n-1=0 \iff x_k=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\cdot\sin\frac{2k\pi}{n}$, pentru $k\in\{1, 2, ..., n-1\}$.

d) Evident.

e) $n=f(1)=(1-x_1)(1-x_2)\cdot...\cdot(1-x_{n-1})$.

f) Avem $1-x_k=2\sin\frac{k\pi}{n}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)\right)$ şi folosind **e)**, obținem:

$$n=(1-x_1)(1-x_2)\cdot...\cdot(1-x_{n-1})=2^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{kn}{n}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\right)\right) \iff$$

$$n=2^{n-1}\left(\cos\left(\frac{3(n-1)\pi}{2}+\frac{(1+2+...+(n-1))\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{3(n-1)\pi}{2}+\frac{(1+2+...+(n-1))\pi}{n}\right)\right)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

$$\iff n=2^{n-1}(\cos(2n-2)\pi+i\sin(2n-2)\pi)\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}=2^{n-1}\cdot\prod_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}.$$

g) Dacă în inegalitatea de la **f)**, îi atribuim lui n valoarea $2n$, rezultă

$$\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sin\frac{2\pi}{2n}\cdot...\cdot\sin\frac{(2n-1)\pi}{2n}=\frac{2n}{2^{2n-1}} \qquad (1)$$

Grupând în membrul stâng din inegalitatea (1) primul factor cu ultimul, al doilea cu penultimul, şamd., deducem: $\sin^2\frac{\pi}{2n}\cdot\sin^2\frac{2\pi}{2n}\cdot...\cdot\sin^2\frac{(n-1)\pi}{2n}=\frac{2n}{2^{2n-1}}=\frac{n}{2^{2n-2}}$, de unde obținem egalitatea cerută.

Subiectul IV.

a) $f'(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $\forall x\in(0,\infty)$.

b) $f''(x)<0$, $\forall x\in(0,\infty)$, aşadar funcția f' este strict descrescătoare pe intervalul $(0,\infty)$.

c) Considerăm $k\in(0,\infty)$. Funcția f este o funcție Rolle pe $[k, k+1]$ şi din teorema lui Lagrange şi din punctul **a)** deducem că există $c\in(k, k+1)$, $f(k+1)-f(k)=\frac{1}{\sqrt[3]{c}}$

d) Folosind pe rând punctele **b)**, **c)** şi **a)** rezultă concluzia.

e) Pentru $n\in\mathbf{N}^*$, avem $b_{n+1}-b_n=a_{n+1}-a_n-(f(n+1)-f(n))\overset{\mathbf{d)}}{<}0$

$c_{n+1}-c_n=a_{n+1}-a_n-(f(n+2)-f(n+1))\overset{\mathbf{d)}}{>}0$

deci şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este strict descrescător iar şirul $(c_n)_{n\geq 1}$ este strict crescător.

f) Pentru $n\in\mathbf{N}^*$ avem $b_n-c_n=f(n+1)-f(n)>0$ (1)

şi folosind monotonia celor două şiruri deducem: $\forall n\in\mathbf{N}^*$, $c_1<c_n<b_n<b_1$.

Obținem că şirurile $(b_n)_{n\geq 1}$ şi $(c_n)_{n\geq 1}$ sunt convergente, fiind monotone şi mărginite.

Mai mult, dacă notăm $\lim_{n\to\infty} b_n = b$ şi $\lim_{n\to\infty} c_n = c$, trecând la limită în (1) deducem $b - c = 0$, deci $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n$.

g) Deoarece şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, obținem $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(b_n + \frac{3}{2}\sqrt[3]{x}\right) = +\infty$.

h) Deoarece şirul $(b_n)_{n\geq 1}$ este convergent, obținem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3}}\right)\cdot\frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n^3} - a_n}{n^2} = \frac{3}{2}.$$